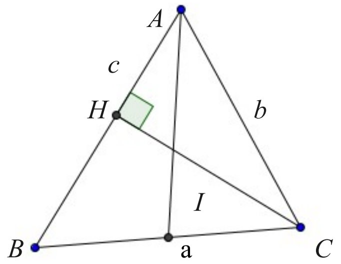
APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1) RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

A) NOTATIONS USELLES



Soit ABC un triangle quelconque. L'usage est de noter :

- $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
- S l'aire du triangle
- $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$

B) LE THEORÈME D'AL KASHI

Théorème :

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\hat{A}$

Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé …

Preuve :

Remarques :

- De la même façon, on montre que :
- Si le triangle est rectangle en A , alors $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\cos\hat{A} = 0$ et … $a^2 = b^2 + c^2$ *(On retrouve le théorème de Pythagore)*

C) LE THEORÈME DE LA MEDIANE

Théorème :

Soit I le milieu de $[BC]$. On a :

$$AB^2 + AC^2 = 2\,AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

On a aussi :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$ et $AB^2 - AC^2 = 2\,\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{BC}$

Preuve :

D) AIRE D'UN TRIANGLE

Propriété :

On a : $S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$

Preuve :

Remarque :

De la même façon, on montre que

E) FORMULE DES SINUS

Propriété :

On a : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$

Preuve :

On a $S = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$

En multipliant par $\frac{2}{abc}$, on obtient

En passant aux inverses (les sinus des angles d'un triangle sont différents de zéro) , on obtient

2) DROITE

A) CARACTÉRISATION D'UNE DROITE

Définition :

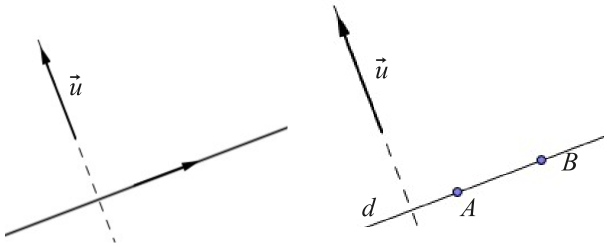
Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d.

Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et $\vec{u}$ un vecteur normal à d.

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$.
C'est à dire

$$M\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0$$



La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux ...

Remarque : Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser le produit scalaire et les vecteurs directeurs .

B) APPLICATION : ÉQUATION D'UNE DROITE DONT ON CONNAIT UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Propriété :

Soit $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

- Si le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax+by+c=0$ (où c est un réel)
- Réciproquement, toute droite ayant une équation de la forme $ax+by+c=0$ (avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$) admet le vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Preuve :

- Soit $A(x_0\,;\,y_0)$ un point de d et $M(x\,;\,y)$ un point du plan , alors :

- Si la droite d a pour équation $ax+by+c=0$, alors le vecteur $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d . (facile à montrer)

  Or $\vec{u}\cdot\vec{v}=a(-b)+b\,a=0$
  Ainsi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux et $\vec{u}$ est normal à d .

3) CERCLE

A) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

Propriété :

Soit A un point du plan et r un réel positif.
Le cercle C de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}^2=r^2$

Preuve :
Soit M un point du plan .
$M\in C \Leftrightarrow AM=r \Leftrightarrow AM^2=r^2\ldots$

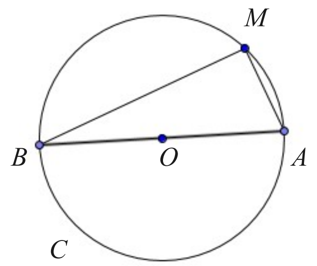
APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

On se place dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.
Soit $A(x_0\,;\,y_0)$, un réel positif r et C le cercle de centre A et de rayon r.

Pour tout point $M(x\,;\,y)$ du plan,
On a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$

Le cercle C est donc l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$du plan tels que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

B) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ



Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan.

La cercle C de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Preuve :

Comme vous le savez depuis longtemps, le cercle C , privé des points A et B , est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M , c'est à dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
D'autre part, si $M = A$ ou $M = B$, alors $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et on a encore $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

Étude d'un exemple :

On se place dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i} , \vec{j})$.
Déterminons une équation du cercle C de diamètre $[AB]$ avec $A(-1 ; 3)$ et $B(2 ; 2)$.

Remarque :
En développant $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (trouvé en A) on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (où a , b et c sont des réels) , mais réciproquement une équation de cette forme ne représente pas toujours un cercle .

Exemple : $x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0$

Ce qui est impossible ; l'ensemble des points vérifiant cette relation est donc l'ensemble vide.

4) TRIGONOMÉTRIE

A) FORMULES D'ADDITION

Propriétés :

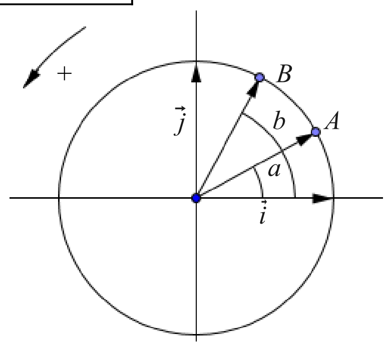
$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$; $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Preuve :

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$



On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormal direct $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.
On note A et B les points de C , définis par $(\vec{i} , \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i} , \overrightarrow{OB}) = b$.
Les coordonnées de A et de B sont respectivement

D'autre part, d'après la relation de Chasles, on a :
$(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) =$

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

- *avec les coordonnées* :

- *en utilisant* $\cos(\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB})$:

Ainsi $\cos(a-b)=$

- $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

Il suffit d'écrire $\cos(a+b)=$

- $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a+b)=$

- $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a-b)=$

Exemple :

En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, on peut calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

-

-

B) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

FORMULES DE DUPLICATION	*FORMULES DE LINEARISATION*
Propriétés : $\forall a\in\mathbb{R}$, on a : • $\sin 2a=2\sin a\cos a$ • $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $=2\cos^2 a-1$ $=1-2\sin^2 a$	• $\cos^2 a=\frac{1+\cos(2a)}{2}$ • $\sin^2 a=\frac{1-\cos(2a)}{2}$

Preuve :

En prenant $b=a$, dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a=2\sin a\cos a$ et $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$.

En utilisant la relation $\cos^2 a+\sin^2 a=1$, on obtient $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ et $\cos 2a=1-2\sin^2 a$

On en déduit les deux dernières formules.